

# CHƯƠNG 7

## Luồng cực đại trong mạng

1

## Luồng cực đại trong mạng

- Giới thiệu
- Các định nghĩa, định lý
- Bài toán luồng cực đại
- Thuật toán Ford - Fulkerson
- Một số ứng dụng của bài toán luồng cực đại

2

## Giới thiệu

- Luồng cực đại là một trong những bài toán tối ưu của Lý Thuyết Đồ Thị, được đề xuất vào đầu những năm 1950.
- Bài toán gắn liền và trở nên nổi tiếng với tên tuổi của hai nhà toán học Mỹ là Ford và Fulkerson

3

## Các định nghĩa, định lý

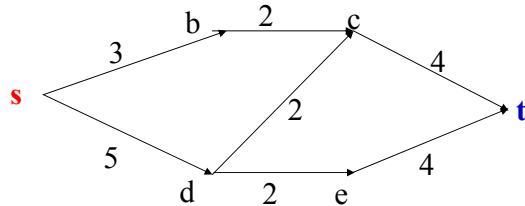
**ĐN1 (Mạng):** Đồ thị có hướng  $G=(V,E)$  là mạng khi và chỉ khi:

- Tồn tại duy nhất một đỉnh  $s \in V$ , mà tại  $s$  không có cung đi vào. Điểm  $s$  gọi là điểm phát
- Tồn tại duy nhất một đỉnh  $t \in V$ , mà tại  $t$  không có cung đi ra. Điểm  $t$  gọi là điểm thu
- Mỗi cung  $u(i,j) \in E$  đều được gán 1 giá trị nguyên không âm  $c(i,j)$  và gọi là khả năng thông qua của mạng.

4

## Các định nghĩa, định lý (tt)

- Đồ thị sau là mạng với điểm phát là đỉnh **s** và điểm thu là **t**



Ta có khả năng thông qua

$$C(s,b) = 3, C(b,c) = 2, C(s,d) = 5, C(d,c) = 2, \\ C(d,e) = 2, C(c,t) = 4, C(e,t) = 4$$

5

## Các định nghĩa, định lý (tt)

- Với một mạng  $G = (V, E, c)$ , ta ký hiệu:
  - $W^-(x) = \{ (a, x) \in E \mid a \in V \}$  - tập các cạnh đi vào đỉnh  $x$ .
  - $W^+(x) = \{ (x, b) \in E \mid b \in V \}$  - tập các cạnh đi ra khỏi đỉnh  $x$ .

6

## Các định nghĩa, định lý (tt)

- **ĐN2 (Luồng trên mạng):** Hàm  $f: E \rightarrow N$  là một *luồng* đi qua mạng  $(G, c)$  nếu:

- $\forall e \in E: f(e) \leq c(e)$
- $\forall x \neq s$  và  $t: f(W^-(x)) = f(W^+(x))$
- Giá trị của luồng  $f$  là số  
 $Val(f) = f(W^+(s)) = f(W^-(t))$

7

## Các định nghĩa, định lý (tt)

- **ĐN3 (lát cắt):** Ta gọi lát cắt  $(X, X^*)$  là một cách phân hoạch tập đỉnh  $V$  của mạng ra thành hai tập  $X$  và  $X^* = V \setminus X$ , trong đó  $s \in X, t \in X^*$ . Khả năng thông qua của lát cắt  $(X, X^*)$  là số:

$$c(X, X^*) = \sum_{\substack{v \in X \\ w \in X^*}} c(v, w)$$

- Lát cắt với khả năng thông qua nhỏ nhất được gọi là **lát cắt hẹp nhất**.

8

## Các định nghĩa, định lý (tt)

- **Bổ đề 1:** Giá trị của luồng  $f$  trong mạng luôn  $\leq$  khả năng thông qua của lát cắt  $(X, X^*)$  bất kỳ trong nó.
- **Hệ quả 1:** Giá trị **luồng cực đại** trong mạng không vượt quá khả năng thông qua của **lát cắt hẹp nhất** trong mạng

9

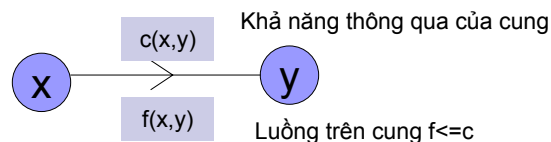
## Bài toán luồng cực đại

- **Phát biểu:** Cho mạng  $G$  với nguồn  $s$ , đích  $t$  và khả năng thông qua  $C(i,j)$ . Trong số các luồng trên mạng  $G$ , tìm luồng có giá trị lớn nhất.
- **Ý tưởng:** xuất phát từ luồng nào đó, ta tìm đường đi từ  $s$  đến  $t$ , cho phép hiệu chỉnh giá trị luồng  $f$  trên đường đi đó sao cho luồng mới có giá trị lớn hơn. Nếu không tìm được đường đi như vậy thì ta có luồng cực đại.
- Đồ thị  $G_f$  đó được gọi là đồ thị tăng luồng.

10

## Định lý

- Gọi  $f$  là luồng trên mạng  $G=(V,E)$ . Các mệnh đề sau đây là tương đương:
  - $f$  là luồng cực đại trong mạng
  - Không tìm được đường tăng luồng  $f$
  - $\exists$  một lát cắt  $(X, X^*)$  mà  $val(f)=c(X, X^*)$



11

## Thuật toán Ford - Fulkerson

### 1. Gán nhãn cho các đỉnh

- Mỗi đỉnh sẽ có 1 trong 3 trạng thái
  - Đỉnh chưa có nhãn
  - Đỉnh có nhãn nhưng chưa xét
  - Đỉnh có nhãn đã xét xong
- Nhãn của đỉnh  $y$  sẽ có dạng  $y: [\pm x, \sigma(y)]$ 
  - $+x$ : cần tăng luồng theo cung  $(x,y)$
  - $-x$ : cần giảm luồng theo cung  $(y,x)$
  - $\sigma(y)$ : là lượng dùng để tăng/giảm
- Đầu tiên, các đỉnh đều chưa có nhãn

12

## Thuật toán Ford – Fulkerson (tt)

### ■ B1:

- Gán nhãn cho đỉnh phát **s**:  $[+s, \infty]$
- Đỉnh s có nhãn nhưng chưa xét
- Tất cả các đỉnh khác chưa có nhãn

13

## Thuật toán Ford – Fulkerson (tt)

### ■ B2:

- Xét 1 đỉnh có nhãn nhưng chưa xét, giả sử đó là x:  $[\pm y, \sigma(y)]$
- Với mỗi đỉnh u chưa có nhãn, là ảnh của x (đỉnh cuối) và  $f(x,u) < c(x,u)$ , được gán nhãn
  - u:  $[+x, \sigma(u)]$  với  $\sigma(u) = \min(\sigma(x), c(x,y) - f(x,y))$
- Với mỗi đỉnh v chưa có nhãn, là tạo ảnh của x (đỉnh đầu) và  $f(v,x) > 0$ , được gán nhãn
  - v:  $[-x, \sigma(v)]$  với  $\sigma(v) = \min(\sigma(x), f(v,x))$
- x có nhãn đã xét; u,v có nhãn nhưng chưa xét

14

## Thuật toán Ford – Fulkerson (tt)

### ■ B3:

- Lặp lại B2 cho đến khi:
    - Hoặc là đỉnh thu T được gán nhãn  $\rightarrow$  B4
    - Hoặc là đỉnh T không được gán nhãn và cũng không thể gán nhãn. Trường hợp này giải thuật kết thúc với luồng cực đại.
- Gọi  $X_0$  là tập hợp các đỉnh có nhãn  
Gọi  $Y_0$  là tập hợp các đỉnh không có nhãn  
Thì  $(X_0, Y_0)$  là lát cắt hẹp nhất

15

## Thuật toán Ford – Fulkerson (tt)

### 2. Tăng luồng

#### ■ B4

- Đặt  $x = t$

#### ■ B5

- Nếu x có nhãn x:  $[+y, \sigma(x)]$  thì tăng luồng theo cung từ  $y \rightarrow x$  một lượng là  $\sigma(t)$
- Nếu x có nhãn x:  $[-y, \sigma(x)]$  thì giảm luồng theo cung từ  $x \rightarrow y$  một lượng là  $\sigma(t)$

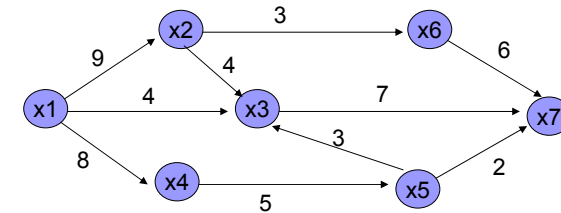
16

# Thuật toán Ford – Fulkerson (tt)

- B6
  - Nếu  $x = s$  (điểm phát) thì xoá tất cả các nhãn, quay lại **B1** với luồng đã được điều chỉnh ở **B5**
  - Nếu  $x \neq s$  thì đặt  $x = y$  và quay lại **B5**

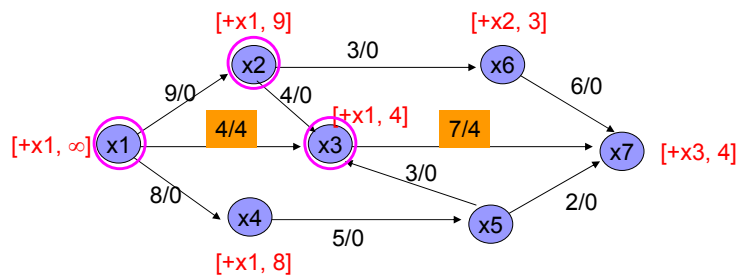
# Ví dụ:

- Tìm luồng cực đại trong mạng sau đây



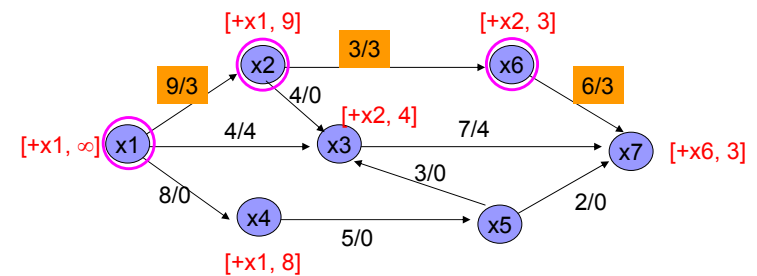
# Giải

- Lần lặp thứ I (luồng = 0)



# Giải

- Lần lặp thứ II (với luồng đã điều chỉnh)





## Giải

- Lần lặp thứ III (với luồng đã điều chỉnh):

21



## Giải

- Lần lặp thứ .... (với luồng đã điều chỉnh):

22